

Écoulements induits par la force gravifique dans une cavité cylindrique en rotation

A. RANDRIAMAMPINANINA, P. BONTOUX et B. ROUX
Institut de Mécanique des Fluides, 1, rue Honnorat, 13003 Marseille, France

(Reçu le 18 Avril 1985 et sous forme finale le 13 Août 1986)

Résumé—Une méthode numérique du type Tau-Chebyshev est utilisée pour décrire le mouvement d'un fluide de Boussinesq en rotation, soumis à un gradient thermique radial. L'analyse des régimes d'écoulement axisymétriques est développée pour des cavités annulaires, lorsque les paramètres physiques varient : $0 \leq Re \leq 2500$; $Ra = 10^2, \pm 10^4, 10^5$; $0 \leq Fr \leq 25$. La transition entre les régimes de convection thermique et ceux dominés par la rotation résulte de la compétition entre les différentes forces : gravifique, centrifuge et de Coriolis. La validité des solutions asymptotiques proposées par Hunter (1966) lorsque $Fr \ll 1$ et $R_c \gg 1$, est discutée lorsque Re varie.

1. INTRODUCTION

DES MOUVEMENTS fluides très complexes peuvent se développer dans les systèmes en rotation sous l'effet des forces gravifique, centrifuge et de Coriolis. Au mouvement de base, solide, lorsque les parois tournent à la même vitesse, peuvent se superposer des mouvements secondaires sous l'effet des conditions appliquées aux frontières du domaine. Conlisk et Walker [1] ont référé trois perturbations majeures à l'origine du mouvement : la rotation différentielle des parois, les flux de masse source-puits, les gradients thermiques pariétaux. Une littérature importante témoigne de l'intérêt, tant fondamental (Hide [2], Stewartson [3], Robinson [4], Greenspan [5], Hunter [6], Barcilon et Pedlosky [7]) qu'appliqué (Owen *et al.* [8], Homby et Hudson [9], De Vahl Davis *et al.* [10], Matsuda *et al.* [11]), porté à l'étude des écoulements dans les systèmes tournants. Bien que des solutions analytiques n'existent pas pour le problème général, des approches asymptotiques sont développées lorsque l'un seulement des mécanismes générateurs est présent et les non-linéarités faibles [3, 4, 6, 7, 9, 11]. Ces analyses théoriques ont été menées surtout avant les années 1970, c'est-à-dire lorsque les moyens informatiques étaient encore assez limités. A l'origine, les objectifs en étaient liés à la connaissance des mouvements atmosphériques à une grande échelle. Généralement, lorsque l'on considère l'action superposée des différents mécanismes moteurs, les approches sont plutôt numériques (De Vahl Davis *et al.* [10], Chew *et al.* [12], Chew [13], Leonardi *et al.* [14], Hyun [15]). Des études expérimentales existent dont une grande partie concerne les problèmes liés aux machines tournantes, turbomachines [8] et centrifugeuses [11]. Des applications plus spécifiques existent également dans le cadre de la solidification dirigée d'alliages métalliques (méthode Czochralski) où s'ajoutent des mécanismes physiques supplémentaires d'interfaces

solide-liquide et liquide-air et l'effet Marangoni (Balasubramanian et Ostrach [16], Lamprecht *et al.* [17], Crochet *et al.* [18], Mihelcic *et al.* [19], Langlois [20]).

En présence d'un flux radial source-puits à l'intérieur d'une cavité annulaire, les solutions déduites de la théorie linéaire (Hide [21]) s'appliquent lorsque l'échelle de vitesse azimutale, V , reste petite comparée à la vitesse d'entraînement des parois : $V/2\Omega H \ll 1$ (Bennetts et Jackson [22]). La relation $V = UE^{-1/2}$ a été proposée en réf. [15] où U est la vitesse radiale à la source et $E = \nu/2\Omega H^2$, le nombre d'Ekman. Lorsqu'une stratification thermique verticale est imposée avec un chauffage par le haut, le mouvement vertical est réduit et la pénétration radiale du flux est favorisée [15]. Quelques configurations de moteurs électriques, qui font intervenir des gradients thermiques pariétaux et la rotation différentielle des parois, ont été étudiées numériquement [10, 14]. Pour les problèmes de centrifugeuses, qui mettent en jeu de très grandes vitesses de rotation, les approches asymptotiques proposées [7, 9, 11], sont basées sur la décomposition du mouvement suivant trois zones : le coeur, les couches d'Ekman sur les parois orthogonales à l'axe de rotation, et les couches de Stewartson sur les parois parallèles à l'axe. Le découplage permet de construire des solutions satisfaisantes lorsque les termes non linéaires sont négligeables : c'est-à-dire lorsque les gradients thermiques restent faibles et les vitesses de rotation grandes. L'influence de la rotation sur l'écoulement induit par un gradient de pression dans une conduite carrée a été étudiée récemment de façon très complète, avec des approches numérique et asymptotique, par Khesghi et Scriven [23].

Les études tant théoriques que numériques ou expérimentales, sont encore rares dans le cas d'un gaz placé dans une enceinte annulaire de courbure finie, soumise à un gradient thermique radial et pour des vitesses de rotation modérées. Lorsque les vitesses

NOMENCLATURE

AR	paramètre de forme ($\Delta R/2H$)	R_c	paramètre de courbure [($R_1 + R_E$)/($R_E - R_1$)]
$a_{nm}, b_{nm}, c_{nm}, d_{nm}$	coefficients des développements en polynômes de Chebyshev des variables ζ, T, ψ, v	Re	nombre de Reynolds de rotation ($2\Omega \Delta R^2/\nu$)
C_p	coefficient de chaleur spécifique	R_1, R_E	rayons interne et externe de la cavité
$e_{nm}^{10}, e_{nm}^{01}, g_{nm}^{10}, g_{nm}^{01}, h_{nm}^{10}, h_{nm}^{01}$	coefficients des développements en polynômes de Chebyshev des termes non linéaires	ΔR	longueur radiale de la cavité ($R_E - R_1$)
f_{nm}	coefficients du développement en polynômes de Chebyshev de termes sources	Ro	nombre de Rossby thermique ($\beta \Delta T$)
f	terme source	t	temps
Fr	nombre de Froude de rotation ($\Omega^2 \Delta R/g$)	T	température normalisée
g	accélération de la pesanteur	T_1, T_E	températures des parois actives
H	demi-hauteur de la cavité	T_n, T_m	polynômes de Chebyshev
k	coefficient de conductivité thermique	u, v, w	composantes de la vitesse dans un repère relatif
M, N	nombres de degrés de liberté dans les deux directions spatiales z, r	V	variable
p	pression	z	coordonnée axiale d'espace.
Pr	nombre de Prandtl (ν/α)	Symboles grecs	
q	ordre de précision (schéma LSODA)	α	coefficient de diffusivité thermique ($k/\rho C_p$)
r	coordonnée radiale d'espace	β	coefficient de dilatation thermique rotationnel de vitesses
Ra	nombre de Rayleigh thermique ($g\beta \Delta T \Delta R^3/\alpha\nu$)	ζ	coordonnée azimutale d'espace
		μ, ν	viscosités moléculaire et cinématique
		ρ	densité
		ψ	fonction de courant
		Ω	vitesse angulaire (uniforme).

sont grandes et le paramètre de courbure infini, des solutions asymptotiques existent dans le cas d'un fluide de Boussinesq (Robinson [4]). Ces solutions ont été généralisées aux mouvements de convection thermique par Hunter [6] dans le cas de cavités de section droite rectangulaire et de surface supérieure libre ou rigide. Les études expérimentales existent essentiellement pour l'eau (Hide [2], Riehl et Fultz [24]), et pour des mélanges de glycérol (Bowden et Eden [25], Fowles et Hide [26]). Ces analyses ont surtout permis de situer, de façon plus qualitative que quantitative, les zones de transition entre les principaux régimes d'écoulement dans les cavités en rotation.

Le présent travail propose une étude numérique de l'influence de la rotation sur la convection thermique. Le mouvement de base généré par la force gravifique est modifié sous l'effet des forces centrifuge et de Coriolis. Cette étude porte sur les écoulements laminaires et axisymétriques d'un fluide de Boussinesq. Elle constitue une première étape d'une étude plus générale prenant en compte les différents mécanismes moteurs évoqués plus haut. L'approximation numérique est basée sur une méthode spectrale de type Tau-Chebyshev, dont les résultats sont confrontés à des approches asymptotiques [6]. Les résultats concernent principalement les mouvements d'un gaz ($Pr = 0.71$) confiné dans un anneau de section carrée ($AR = 1$) de courbure $R_c = 2$ lorsque le nombre de Reynolds de

rotation Re varie de 0 à 2500, pour les nombres de Rayleigh thermique $Ra = 10^2, \pm 10^4$ et 10^5 ; les valeurs du nombre de Froude de rotation étant comprises entre 0 et 25.

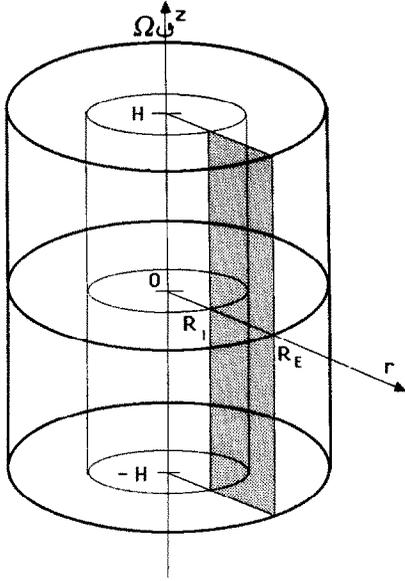
2. MODELISATION MATHÉMATIQUE

2.1. Le modèle physique correspond à une enceinte contenue entre deux cylindres verticaux coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et R_E , et limitée par deux plaques planes en $z = \pm H$ (Fig. 1). Les parois verticales sont isothermes, de températures T_1 et T_E , et on impose une répartition linéaire de température sur les parois radiales. La cavité tourne avec une vitesse angulaire uniforme Ω autour de son axe de symétrie vertical. Elle contient un fluide de Boussinesq dont les propriétés physiques sont supposées constantes. La densité est aussi considérée constante sauf dans les termes gravifique, centrifuge et de Coriolis, où elle est reliée à la température par la relation linéaire :

$$\rho = \rho_0 \{1 - \beta(T - T_0)\} \quad \text{où } T_0 = (T_1 + T_E)/2. \quad (1)$$

2.2. Pour les régimes d'écoulement laminaires et axisymétriques, les équations en variables primitives s'écrivent de la façon suivante, dans un repère cylindrique relatif en rotation :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$


 FIG. 1. Géométrie du domaine annulaire en rotation uniforme autour de l'axe z .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ru^2)}{\partial r} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) + \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{v^2}{r} + \Omega^2 r + 2\Omega v \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruv)}{\partial r} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = v \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) - \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{uv}{r} + 2\Omega u \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruw)}{\partial r} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + v \Delta w - \frac{\rho}{\rho_0} g \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(ruT)}{\partial r} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} = \alpha \Delta T \quad (6)$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

La vitesse azimutale v est définie comme la vitesse relative par rapport au mouvement solide des parois. Le modèle mathématique, similaire à celui développé par De Vahl Davis *et al.* [10], pour un repère de référence fixe, est différent de celui utilisé par Homsy et Hudson [9] pour des systèmes en rotation rapide, qui prend en compte les variations de densité seulement dans les termes de forces centrifuge et gravifique. Les équations de Navier–Stokes sont alors couplées à l'équation d'énergie par les forces gravifique, centrifuge et de Coriolis. Pour la résolution numérique, la formulation en rotationnel de vitesses et fonction de courant a été utilisée, ce qui permet d'éliminer la pression et une équation du système avec :

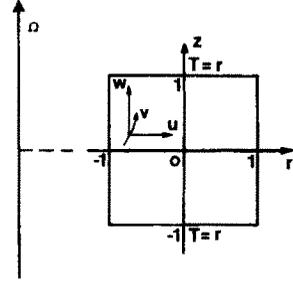


FIG. 2. Définition du système de référence et des vitesses.

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (7)$$

Les échelles de référence sont choisies comme α/H pour les vitesses et, respectivement, $\Delta R/2$ et H pour les variables d'espace dans les directions radiale et axiale (Fig. 2) :

$$r' = (2/\Delta R)r - R_c, \quad z' = z/H$$

avec

$$\Delta R = R_E - R_I, \quad R_c = (R_E + R_I)/\Delta R.$$

Le temps de référence résultant est H^2/α . La température est normalisée par rapport à la différence de températures appliquée entre les frontières, avec T_0 comme température de référence :

$$T' = 2(T - T_0)/\Delta T, \quad \text{avec } \Delta T = T_E - T_I.$$

Le système résultant s'écrit de la façon suivante (où les primes sont omises dans la suite afin de simplifier l'écriture) avec comme paramètres caractéristiques, les nombres de Rayleigh thermique, $Ra = g\beta \Delta T \Delta R^3/\alpha\nu$, de Reynolds de rotation, $Re = 2\Omega \Delta R^2/\nu$, de Froude de rotation, $Fr = \Omega^2 \Delta R/g$, de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$ et les paramètres de forme, $AR = \Delta R/2H$ et de courbure, R_c :

$$\frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{AR^2(r+R_c)} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \left(1 + \frac{r}{R_c} \right) \zeta \quad (8)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{AR} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{u\zeta}{AR(r+R_c)} = \frac{Ra Pr}{16AR^4} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{Gravifique (I)}$$

$$-\frac{2Ra Fr}{Re^2 Pr} \frac{v^2}{AR(r+R_c)} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{2v}{AR(r+R_c)} \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{Centrifuge (IIa) (IIb)}$$

$$-\frac{Ra Fr Pr}{32AR^3} (r+R_c) \frac{\partial T}{\partial z} \quad \text{(IIc)}$$

$$-\frac{Ra Fr}{2AR^2 Re} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{Re Pr}{4AR^2} \frac{\partial v}{\partial z} + Pr \left(\frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \quad \text{Coriolis (IIIa) (IIIb)}$$

$$+ \frac{1}{AR^2(r+R_c)} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{AR^2(r+R_c)} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{AR} \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \left(\frac{uw}{AR(r+R_c)} + \frac{Re Pr}{4AR^2} u \right) \times \left(1 - 2 \frac{Ra Fr}{Re^2 Pr} T \right) + Pr \left(\frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{AR^2(r+R_c)} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{AR^2(r+R_c)^2} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{AR} \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{AR^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{AR^2(r+R_c)} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (11)$$

2.3. Les conditions naturelles de non perméabilité et d'adhérence aux parois sont utilisées aux frontières $r = \pm 1$ et $z = \pm 1$ du domaine: $\psi = \partial\psi/\partial n = v = 0$. Les conditions thermiques de parois axiales isothermes et de répartition linéaire en fonction de r sur les parois radiales s'écrivent: $T = \pm 1$ pour $r = \pm 1$, et $T = r$ pour $z = \pm 1$ (Fig. 2).

3. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

3.1. Méthode d'approximation spectrale de type Tau-Chebyshev

L'approche numérique est basée sur la méthode spectrale de type Tau-Chebyshev, qui s'est révélée comme une méthode efficace sur ordinateur vectoriel depuis une dizaine d'années (Gottlieb et Orszag [27]). Une approximation de la solution sur la base des polynômes de Chebyshev, $T_n(r)$ et $T_m(z)$, peut s'écrire:

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ T \\ \psi \\ v \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \zeta_{NM} \\ T_{NM} \\ \psi_{NM} \\ v_{NM} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \\ c_{nm} \\ d_{nm} \end{pmatrix} T_n(r) T_m(z) \quad (12)$$

où N et M sont les nombres de modes utilisés dans les directions r et z . Les équations (8)-(11) sont alors approchées à un résidu près du fait du développement tronqué. En imposant la condition d'orthogonalité des résidus par rapport à la base des polynômes de Chebyshev, il en résulte un système d'équations différentielles pour chacune des composantes spectrales (méthode Tau), comprenant une équation de type "Poisson" et trois équations de transport:

$$\frac{1}{AR^2} c_{nm}^{20} - \frac{1}{AR^2} \bar{c}_{nm}^{20} + c_{nm}^{02} = \bar{a}_{nm} \quad (13)$$

$$\frac{da_{nm}}{dt} + \frac{1}{4AR} (e_{nm}^{10} + e_{nm}^{01}) - Pr \left(\frac{1}{AR^2} a_{nm}^{20} + a_{nm}^{02} \right) - \frac{Re Pr}{4AR^2} d_{nm}^{01} - \frac{Ra Pr}{16AR^4} b_{nm}^{10} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{db_{nm}}{dt} + \frac{1}{4AR} (g_{nm}^{10} + g_{nm}^{01}) - \left(\frac{1}{AR^2} b_{nm}^{20} + b_{nm}^{02} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{dd_{nm}}{dt} + \frac{1}{4AR} (h_{nm}^{10} + h_{nm}^{01}) - Pr \left(\frac{1}{AR^2} d_{nm}^{20} + d_{nm}^{02} \right) = 0 \quad (16)$$

pour

$$0 \leq n \leq N-2, \quad 0 \leq m \leq M-2.$$

Les divers coefficients $e_{nm}^{10}, e_{nm}^{01}, g_{nm}^{10}, g_{nm}^{01}, h_{nm}^{10}, h_{nm}^{01}, \bar{c}_{nm}^{20}, \bar{a}_{nm}$ correspondent aux différents termes non linéaires et linéaires à coefficients variables qui apparaissent dans les termes convectifs, de diffusion et sources. Ces termes sont évalués dans le plan physique, en utilisant des algorithmes de transformation rapide sur ordinateur vectoriel (CRAY-1/S). Dans le cas des polynômes de Chebyshev, les transformées de Fourier rapides (F.F.T.) sont utilisées. L'algorithme développé par Temperton [28], qui est applicable pour des composantes en nombre $I = 2^p 3^q 5^r$ et autorise une souplesse d'utilisation proche de l'algorithme de Singleton [29] (valable pour tout I , mais relativement coûteux) de la bibliothèque scientifique I.M.S.L., a été choisi en raison de sa rapidité en temps de calcul. Pour un double transfert entre le plan physique et le plan spectral, les coûts en temps CPU sont donnés sur la Fig. 3: le rapport maximum entre les deux F.F.T. atteint 30 pour 32×32 composantes. Les coûts obtenus avec les algorithmes F.F.T. vectorisés de la bibliothèque scientifique SCILIB et de Lhomme *et al.* [30], applicables pour les puissances de 2 seulement, sont également portés sur la Fig. 3.

Pour la résolution de l'équation (13) de type "Poisson", la méthode de diagonalisation matricielle, pro-

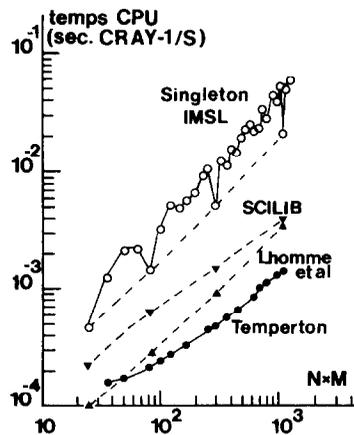


Fig. 3. Evaluation du temps CPU pour un double transfert entre le plan physique et le plan spectral dans la base des polynômes de Chebyshev.

posée par Haidvogel et Zang [31] et utilisée par Bondet de la Bernardie [32], a été étendue en domaine cylindrique (Randriamampianina [33]). Les conditions sur le rotationnel de vitesses ζ sont dérivées des conditions d'adhérence et de l'équation (8) (Bontoux *et al.* [34], Randriamampianina *et al.* [35]).

3.2. Schéma d'intégration dans le temps

Pour l'intégration temporelle des équations de transport (14)–(16), la méthode LSODA (Hindmarsh [36], Petzold [37]) utilisée, est fondée sur des schémas de type prédictor correcteur (Gear [38]). En plus d'une adaptation automatique du pas de temps, elle comporte une sélection de méthodes pour traiter le problème lorsqu'il est raide (les échelles de temps des variables diffèrent de façon importante) ou non raide. Pour l'équation modèle : $dV/dt = F(V, t)$, les schémas temporels sont :

(1) Lorsque le système est non raide : le schéma d'Adams implicite ou d'Adams Moulton :

$$V^k = V^{k-1} + \Delta t \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i F^{k-i} \quad (17)$$

où q est l'ordre de la précision ($1 \leq q \leq 12$), et les coefficients β_i dépendent uniquement de q , $\beta_0 > 0$; la solution de (17) est obtenue par itération fonctionnelle :

$$V^{k,j+1} = V^{k-1} + \Delta t \beta_0 F(V^{k,j}, t^k) + \Delta t \sum_{i=1}^{q-1} \beta_i F^{k-i}. \quad (18)$$

(2) Lorsque le système est raide : le schéma BDF (Backward Differentiation Formula) :

$$V^k = \sum_{i=1}^q \alpha_i V^{k-i} + \Delta t \beta_0 F^k = a^k + \Delta t \beta_0 F^k, \quad \text{avec } 1 \leq q \leq 5 \quad (19)$$

la solution de (19) utilise une méthode de Newton itérative modifiée :

$$-P(V^{k,j+1} - V^{k,j}) = V^{k,j} - a^k - \Delta t \beta_0 F(V^{k,j}, t^k) \quad (20)$$

où $P = I - \Delta t \beta_0 J$ avec I , la matrice unité, et $J = \partial F / \partial V$, le jacobien du système, évalué périodiquement pour $V^{k,0}$ [35].

4. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

Des approches asymptotiques ont été développées par Robinson [4] et Hunter [6] pour un fluide de Boussinesq soumis à la rotation uniforme rapide de l'enceinte, avec un paramètre de courbure infini ($R_c \gg 1$). La variation de la densité n'est prise en compte que pour la force gravifique. Les effets de la force centrifuge étant négligés ($Fr \ll 1$), les solutions

résultent de la compétition entre les forces de Coriolis et gravifique.

4.1. Solutions conductrices

En régime conductif, et lorsque $Re \gg 1$ et $Ra/(Re^2 Pr) \ll 1$, des approches de type couche limite [4, 6] ont montré qu'il existait, entre les parois radiales (isolées) et loin des parois axiales, des solutions caractérisées par un cisaillement constant :

$$\psi_1^E = 2AR \lambda F^E(z) = 2^{-1/2} \lambda \{1 - (\cos \zeta_1 - \sin \zeta_1) e^{\zeta_1} - (\cos \zeta_2 + \sin \zeta_2) e^{-\zeta_2}\} \quad (21)$$

$$v_1^E = \frac{Ra}{4AR^2 Re} (z - e^{\zeta_1} \cos \zeta_1 + e^{-\zeta_2} \cos \zeta_2) = V^E(z) \quad (22)$$

où $\lambda = Ra Re^{-3/2}$, et, ζ_1 et ζ_2 sont les variables réduites dans la direction axiale, caractéristiques des couches d'Ekman :

$$\zeta_1 = \frac{Re^{1/2}}{2^{3/2} AR} (z-1) \quad \text{et} \quad \zeta_2 = \frac{Re^{1/2}}{2^{3/2} AR} (z+1).$$

Les vitesses radiale et axiale dérivées de (21) sont alors :

$$u_1^E = \frac{Ra}{2AR Re} (e^{\zeta_1} \sin \zeta_1 + e^{-\zeta_2} \sin \zeta_2), \quad w_1^E \equiv 0. \quad (23)$$

L'extension de ces solutions dans la direction radiale a été proposée par Hunter [6], en tenant compte uniquement des couches de Stewartson d'ordre $Re^{1/3}$, suivant ainsi les analyses de Robinson [4]. Le raccordement avec les conditions de non perméabilité et d'adhérence est obtenu à l'aide d'une fonction complexe $A(\xi)$ de la variable réduite caractéristique $\xi = r Re^{1/3}$. Ces solutions s'écrivent alors :

$$\psi_1^S = 2AR \lambda F^E(z) \{1 + 2^{-1/2} A(\xi)\} \quad \text{et} \quad v_1^S = V^E(z) \{1 + A(\xi)\}. \quad (24)$$

4.2. Effets de la convection thermique

Lorsque la convection thermique est considérée comme une perturbation de la solution conductrice, Hunter [6] a proposé des solutions sous la forme de développement en puissance de $\lambda = Ra Re^{-3/2} \leq O(1)$ pour :

$$Re \gg 1, \quad Ra Pr^{-1} Re^{-2} \ll 1, \quad Ra Pr^{-1} Re^{-5/3} \ll 1.$$

Dans le cas de la température, la solution s'écrit :

$$T = r + \frac{2^{1/2} \lambda}{AR \pi^2} D(r, z, AR) + O(\lambda^2) \quad (25)$$

où D est une fonction compliquée de r , z et AR . La solution dynamique s'exprime de façon différente suivant les régions d'écoulement :

(a) Dans la région interne et sur les couches d'Ekman (d'ordre $Re^{1/2}$) :

$$\psi_2^E = B(r) \psi_1^E \quad (26)$$

$$v_2^E = \frac{Ra}{2AR Re} \{ C(r, z) + B(r)(-e^{\zeta_1} \cos \zeta_1 + e^{-\zeta_2} \cos \zeta_2) \} \quad (27)$$

avec

$$B(r) = \sigma_1(r, -1, 1)/2, \\ C(r, z) = \{ \sigma_1(r, -1, z) + \sigma_1(r, 1, z) \} / 2$$

et

$$\sigma_1(r, z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial T}{\partial r} dz.$$

La vitesse radiale se déduit directement de u_1^E par (26) alors que la vitesse axiale s'exprime comme une perturbation d'ordre λ^3 :

$$u_2^E = B(r)u_1^E, \quad (28) \\ w_2^E = -\frac{\lambda^3}{8AR^3} W(r, AR) + O(\lambda^5).$$

(b) Dans les couches de Stewartson parallèles à l'axe de rotation, où existe une double structure de couches [3] (les solutions sont explicitées relativement à la paroi interne $r = -1$):

(i) les couches internes d'ordre $Re^{1/3}$ (caractérisées par la variable réduite $\xi = r Re^{1/3}$) où :

$$\psi_3^S = 2AR Ra Re^{-4/3} P(\xi, z, AR) \quad (29) \\ v_3^S = Ra(2AR Re)^{-1} \{ -\kappa - K Re^{-1/12} \kappa \xi + \sigma_2(z) + Q(\xi, z, AR) \} \quad (30)$$

où $P(\xi, z, AR)$ et $Q(\xi, z, AR)$ sont des développements en série similaires à $D(r, z, AR)$ (cf. référence [6]);

(ii) les couches externes d'ordre $Re^{1/4}$ (caractérisées par la variable réduite $\eta = r Re^{1/4}$) où :

$$\psi_3^S = 2AR \lambda \{ f_0 + 2^{3/2} AR^2 \kappa z \exp(-K\eta) \} \quad (31) \\ v_3^S = Ra(2AR Re)^{-1} \{ -2^{1/2} f_0 + \sigma_2(z) - \kappa \exp(-K\eta) \} \quad (32)$$

avec

$$f_0 = \frac{1}{2^{3/2} AR} + \frac{\lambda^2}{2^{3/2} AR^3 \pi^2} S(AR) + O(\lambda^4) \\ \kappa = 2^{1/2} f_0 + \sigma_3/4AR, \\ K = 2^{1/4} AR^{1/2},$$

$$\sigma_2(z) = \int_{-1}^z \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=-1} dz$$

et

$$\sigma_3 = \int_{-1}^1 (z-1) \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=-1} dz.$$

On remarquera que les perturbations convectives correspondent à des termes d'ordre λ^2 et λ^3 de la solution de base conductrice d'ordre λ .

4.3. Etude des transferts thermiques

Des relations ont été proposées [6] pour le nombre de Nusselt aux parois actives. En régime de convection thermique, le nombre de Nusselt diffère de la valeur un, correspondant au cas conductif, et s'exprime sous la forme de développement en puissance de λ :

$$Nu = 1 + \lambda^2 G(AR) + \lambda^4 H(AR) + O(\lambda^5) \quad \text{pour } \lambda \leq O(1). \quad (33)$$

Lorsque $AR \ll 1$, les fonctions $G(AR)$ et $H(AR)$ s'expriment par des relations asymptotiques de la façon suivante :

$$G(AR) = 0.068/AR \\ \text{et } H(AR) = -0.00121/AR^2 - 0.00237/AR^3. \quad (34)$$

Les variations de $G(AR)$ et $H(AR)$ sont données sur la Fig. 2 de la réf. [6]. Pour $AR = 1$, on a :

$$Nu = 1 + 0.061\lambda^2 - 0.0027\lambda^4 + O(\lambda^5). \quad (35)$$

5. REGIMES D'ÉCOULEMENT ET APPROXIMATION DE BOUSSINESQ

5.1. Régimes d'écoulement dans les domaines annulaires en rotation

Les études expérimentales ont été menées principalement dans le cas de liquides [2, 25, 26]. Quatre régimes distincts ont été relevés par Hide [2]: des régimes axisymétriques, d'ondes stationnaires, d'oscillations périodiques et irrégulier. Le paramètre caractéristique pour ces régimes paraît être le regroupement $Ro/(Fr AR)$ (équivalent à $Ra/(Re^2 Pr AR)$). Les régimes axisymétriques ont été observés principalement pour $Ro/(Fr AR) < 1.58 \pm 0.05$. Complémentairement aux études de Hide [2], effectuées pour l'eau, Fowles et Hide [26] ont étudié une gamme plus importante de paramètres, à la fois pour des cavités ouvertes (surfaces libres) et fermées, pour des nombres de Prandtl correspondant à des mélanges d'eau et de glycérol, soit $Pr = 7.19, 18.4$ et 62.7 ; les paramètres géométriques varient entre les limites suivantes $0.18 \leq AR \leq 0.51$ et $1.37 \leq Re \leq 5.29$ (Tableau 1). Il n'existe cependant pas à notre connaissance d'études similaires effectuées pour l'air.

Nous avons représenté sur la Fig. 4, les points de fonctionnement calculés numériquement dans un diagramme ($Ro/(Fr AR, Re^2 AR^{1/2})$), où figurent les courbes frontières entre les différents régimes données dans [26]. Pour des conditions similaires, les points de fonctionnement dans le cas de l'air ($Pr = 0.71$) se trouvent décalés vers le haut du diagramme, par rapport au cas $Pr = 7.1$. Bien que les points de fonction-

Tableau 1. Valeurs des paramètres utilisés dans [26]

Expériences	AR	R_c	Pr	Ra	Re	Fr
I	0.254	3.74	7.19	4.69 E02 à 1.45 E08	8.00 E02 à 1.41 E04	1.02 E-3 à 3.14 E-1
IIa	"	"	18.4	2.88 E03 à 8.50 E06	8.06 E02 à 2.28 E03	5.23 E-3 à 1.00 E-1
IIb	"	"	62.7	9.29 E03 à 2.90 E07	"	"
IIIa	0.18	"	7.19	3.60 E02 à 1.50 E08	5.51 E02 à 9.05 E03	4.84 E-4 à 1.30 E-1
IIIb	0.51	"	"	"	9.21 E02 à 1.51 E03	1.35 E-3 à 3.63 E-1
IVa	0.192	1.37	"	9.31 E02 à 6.03 E07	5.25 E02 à 5.54 E03	4.68 E-5 à 2.21 E-2
IVb	"	5.29	"	"	"	1.24 E-4 à 5.85 E-2
IVc	0.51	1.37	"	"	8.54 E02 à 9.01 E03	1.81 E-4 à 8.54 E-2
IVd	"	5.29	"	"	"	4.78 E-4 à 2.26 E-1

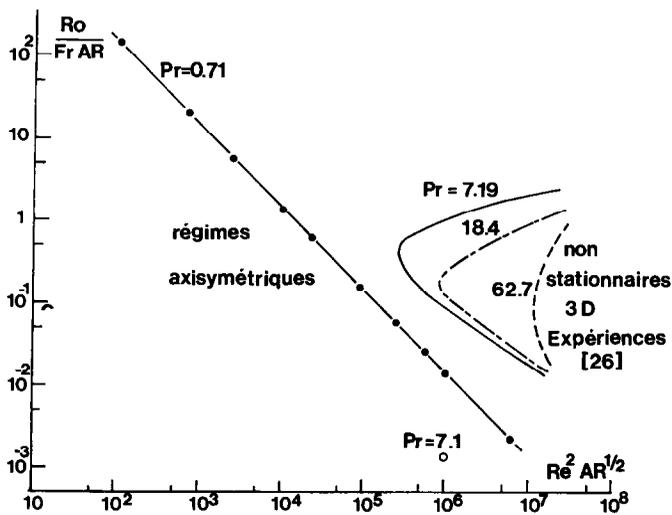


FIG. 4. Régimes d'écoulement dans le diagramme $(Ro/Fr AR, Re^2 AR^{1/2})$: transition entre les régimes axisymétriques et non stationnaires tridimensionnels, déterminée expérimentalement pour $Pr \geq 7.19$ (réf. [26]); points de fonctionnement correspondant aux simulations numériques pour $Pr = 0.71$ et 7.10 .

nement restent dans la région définie par Fowles et Hide [26] pour correspondre aux régimes axisymétriques, des confirmations expérimentales sont néanmoins nécessaires. En effet, Greenspan [5] a précisé que les zones de transition entre les différents régimes dépendent fortement de la viscosité cinématique ν et que les deux paramètres du diagramme ne sauraient les délimiter de façon absolue.

5.2. Approximation de Boussinesq

L'approximation de Boussinesq est le modèle généralement utilisé pour étudier la convection thermique dans les liquides et les gaz. Des travaux [39–41] ont montré que les solutions obtenues avec le modèle de Boussinesq et avec des propriétés physiques variables sont très voisines lorsque $Ro = \beta \Delta T \approx \Delta T/T_0 \leq 0.10$. Les limites réelles du modèle ne sont cependant pas encore définitivement connues (Joseph [39]). Des limites théoriques de validité ont été proposées par Gray et Giorgini [40] pour l'air et l'eau, respectivement $Ro \leq 0.10$ et $Ro \leq 0.0043$ (lorsque $T_0 = 288 K$). Par la voie numérique, Leonardi [41] a étudié le modèle de Boussinesq par rapport à des modèles de propriétés physiques variables, fonction de la température et/ou de la pression. Lorsque $Ro = 1$

(dans le cas de l'air), le modèle de Boussinesq conduit à une surestimation de 50% de la densité par rapport à la loi des gaz parfaits (pour $T_0 = 288 K$). Par rapport au modèle considérant seulement les variations de la densité avec la température, il peut en résulter une augmentation substantielle de la convection : pour $Ra = 10^4$ et $AR = 1$, les vitesses sont surestimées de l'ordre de 20 à 30% et le débit accru dans un rapport voisin de deux. Lorsque l'on tient compte, aussi, de la variation de la densité avec la pression (ce qui produit une augmentation de la densité), il y a augmentation du débit et la différence n'est que de 35%, pour $Ro = 2$ (avec $Ra = 10^4$ et $AR = 2$). Le modèle de Boussinesq tend à exagérer la raideur du problème : ainsi pour $Ro > 0.5$, Leonardi a observé que le modèle Boussinesq conduit systématiquement à des régimes de type couche limite, alors que ceux-ci sont, plutôt, de type transitionnel (conduction-couche limite) lorsqu'ils sont obtenus avec les propriétés physiques variables.

Dans la présente étude, les calculs ont été menés au-delà des limites habituelles pour Ro , et des solutions axisymétriques ont été obtenues jusqu'à des valeurs de $Ro \leq 26$. La Fig. 5 donne le diagramme (Ro, Re^2) des points de fonctionnement obtenus, ainsi que la courbe limite d'existence des solutions, qui

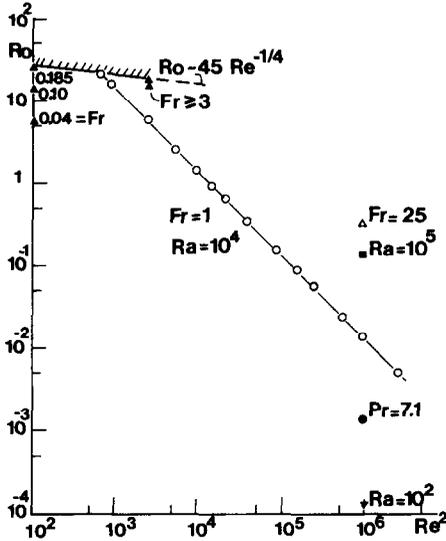


FIG. 5. Limite de convergence des solutions de Boussinesq axisymétriques. Points de fonctionnement correspondant aux simulations numériques dans le diagramme (Ro, Re^2) . Conditions de calcul : $Ra = 10^4, Pr = 0.71, Fr = 1, AR = 1, R_c = 2$ (excepté lorsque les valeurs sont précisées).

s'exprime comme $Ro \approx 45/Re^{1/4}$. Au voisinage de cette limite, il apparaît dans l'équation de quantité de mouvement azimutale un accroissement très important des termes de Coriolis du fait de l'approximation de Boussinesq. Dans les solutions, on observe de fortes augmentations des vitesses azimutales, très localement, au voisinage de la paroi chaude, alors que le reste de la cavité est concerné par des vitesses relatives négatives. Les configurations d'isothermes, de lignes de courant, d'isotourbillons et d'isovitesses azimutales sont montrées sur la Fig. 6, pour des valeurs des paramètres, Re et Fr , proches des conditions critiques. Ces solutions correspondent à un état convectif accentué, mis en évidence par l'accroissement de la déformation des isothermes (cf. Fig. 17). Egalement, une recirculation tend à naître dans le coin inférieur où se développent les survitesses azimutales.

6. CONFIGURATIONS ETUDIÉES

Les simulations numériques ont été principalement menées avec 17×17 composantes de Chebyshev qui se sont révélées suffisantes pour les configurations étudiées correspondant à une cavité annulaire de section droite carrée, $AR = 1$, et de paramètre de courbure $R_c = 2$, contenant de l'air, $Pr = 0.71$ [33]. La solution conductrice de référence pour la température s'écrit :

$$T(r) = \frac{\log \left[\frac{(R_c + r)^2}{R_c^2 - 1} \right]}{\log \left[\frac{R_c + 1}{R_c - 1} \right]} \quad (36)$$

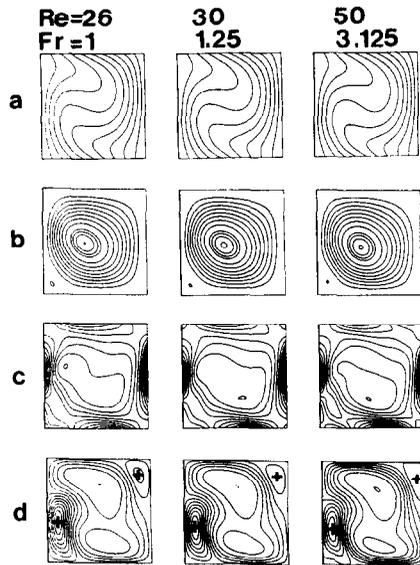


FIG. 6. Configurations d'écoulement au voisinage des limites d'existence des solutions de Boussinesq axisymétriques : isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), et isovitesses azimutales (d) pour $Ra = 10^4, Pr = 0.71$. (Les isovaleurs de chaque variable sont définies similairement, ainsi par exemple, $\psi_k = k(\psi_{max} - \psi_{min})/10 + \psi_{min}$, $k = 1 \text{ à } 9$; pour la variable ψ , deux isovaleurs additionnelles sont considérées au voisinage de l'extrémum; pour la variable v , les extréma positifs sont indiqués par un signe +.)

6.1. Influence du nombre de Reynolds de rotation Re

6.1.1. Analyse des solutions. On a représenté sur la Fig. 7, l'évolution des configurations d'isothermes, de lignes de courant, d'isotourbillons et d'isovitesses azimutales, lorsque l'on augmente Re de 0 à 2500 avec $Ra = 10^4$. Lorsque $Re = Fr = 0$, les lignes de courant (comme les déformations des isothermes) indiquent un décentrement caractéristique du tourbillon central vers la paroi externe, en accord avec les résultats obtenus par Connor et Güceri [42] (cf. Güceri et Farouk [43]).

Lorsqu'il y a rotation ($Re > 0$ et $Fr = 1$), on observe tout d'abord un entraînement du milieu fluide dans la direction azimutale sous l'effet de la viscosité près des parois. Suivant les valeurs du nombre Re , et la position (r, z) dans la cavité, la composante azimutale de la vitesse peut être positive (zone de survitesse) ou négative (zone de sousvitesse) par rapport à la vitesse d'entraînement des parois. Pour $Re = 50$, tout le milieu fluide est en situation de sousvitesse, le minimum de vitesse correspondant à la partie centrale supérieure. Pour $Re = 75$, le minimum est déporté vers le bas. Une zone de survitesse se développe pour $Re = 100$, dans le haut de la partie intérieure. Cette zone s'étend progressivement vers toute la partie supérieure de la cavité, repoussant vers le bas toute la zone de sousvitesse pour $125 < Re < 200$. Pour $Re = 300$, la zone de survitesse occupe alors la majeure partie supérieure de la cavité. Au-delà, la structure générale des lignes d'isovitesses azimutales n'évolue plus énormément. Il y a stratification des

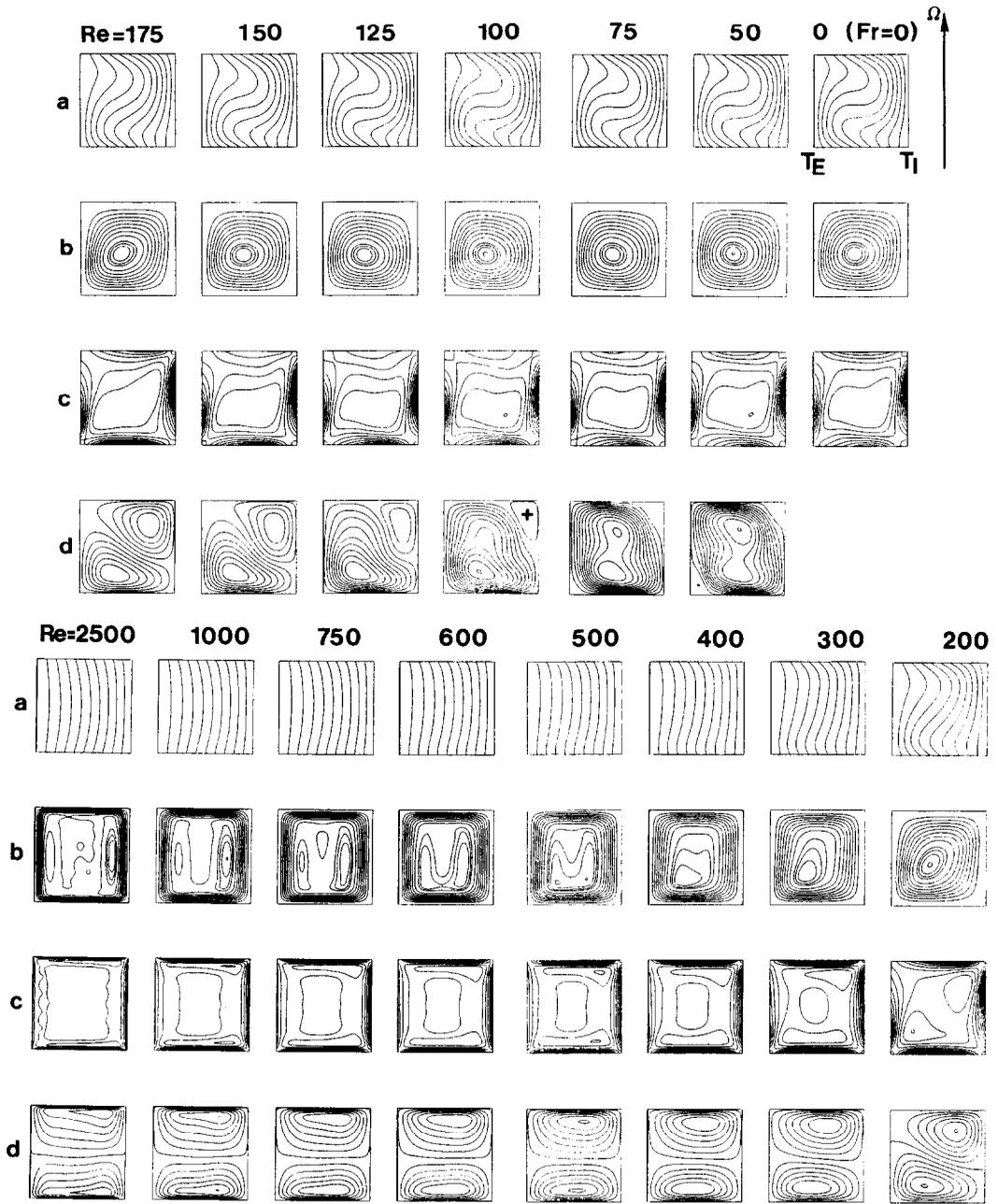


FIG. 7. Configurations d'écoulement lorsque Re varie: isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), isovitesse azimutales (d) pour $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$, $Fr = 1$ (sauf pour $Re = 0$, $Fr = 0$) (voir commentaire Fig. 6). Quelques valeurs extrémales de $\psi_{min}(Re)$: -5.885 ($Re = 0$), -6.175 ($Re = 50$), -6.052 ($Re = 100$), -5.095 ($Re = 150$), -3.105 ($Re = 200$), -1.322 ($Re = 300$), -0.766 ($Re = 400$), -0.514 ($Re = 500$), -0.286 ($Re = 750$), -0.192 ($Re = 1000$), -0.052 ($Re = 2500$).

vitesse entre les parois horizontales. Les extréma sont localisés dans leurs voisinages immédiats. Lorsque Re augmente, ils se déplacent vers les coins internes et leurs valeurs diminuent comme $1/Re$ (cf. Fig. 14).

En ce qui concerne les lignes de courant dans le plan vertical, il y a une lente évolution lorsque Re augmente: pour $Re > 300$, les lignes de courant sont concentrées sur le pourtour du domaine, et aux voisinages des parois horizontales (couches d'Ekman) en

particulier. Le tourbillon central de convection thermique s'étale progressivement et fait place à une zone de faible mouvement occupant tout le coeur de la cavité. Des mouvements secondaires, de faible intensité, s'installent pour $Re = 600$ parallèlement aux parois verticales. Pour $Re \geq 750$, le tourbillon secondaire le plus intense, relativement, est localisé du côté de la paroi interne froide, du fait des gradients thermiques et de la courbure.

En effet, les déformations des isothermes évoluent de façon significative entre le régime de convection thermique dominante ($Re < 125$) et celui où la convection est stabilisée par la rotation ($Re \geq 600$). La transition est observée pour $Re = 500$ et $Ra = 10^4$, c'est-à-dire $Ra Re^{-2} \approx 0.04$. Elle est caractérisée qualitativement par la disparition du tourbillon central, la concentration des lignes de courant à la périphérie, la stratification horizontale des isovitesse azimutales et la nature conductrice des isothermes.

Les lignes d'isotourbillons révèlent les zones de frottements aux voisinages des parois. En régime de convection thermique pure, les zones de frottements se situent le long des parois verticales, intérieure et extérieure. Lorsque la cavité est mise en rotation, les frottements deviennent relativement plus importants aux voisinages de la paroi horizontale inférieure ($Re > 150$) puis supérieure ($Re > 200$), alors qu'ils diminuent sur les parois verticales, en particulier la paroi externe ($Re > 400$). Pour $Re > 600$, les configurations de lignes isotourbillons ne sont pas modifiées et mettent en évidence la dominance des frottements visqueux sur les parois horizontales.

6.1.2. Bilan des forces. Ces solutions résultent de la compétition de différents mécanismes moteurs. Dans le cas de la quantité de mouvement azimutale (10), le mouvement résulte essentiellement de la compétition entre les forces de Coriolis et visqueuse, pour les valeurs élevées de Re . Cela coïncide avec les analyses de Hyun [15] en présence d'un flux source-puits faible dans la direction axiale. Pour l'équation de transport du rotationnel de vitesses (9), le bilan est plus complexe puisqu'il met en jeu les forces : gravifique (I), centrifuge (II) et de Coriolis (III) ainsi que les forces visqueuse et d'inertie. Les configurations des forces externes ont été représentées de façon systématique dans le plan (r, z) sur la Fig. 8, lorsque Re varie. Suivant les valeurs de Re , la force gravifique ($Re \leq 100$) ou la force de Coriolis ($Re \geq 200$) domine, et la force visqueuse joue le rôle de force d'équilibre principal, ainsi que les forces d'inertie pour les faibles valeurs de Re .

La force gravifique (I) reste constante sur les parois horizontales, du fait de la répartition linéaire de température. Au-delà de $Re = 500$, on n'observe plus de déformation caractéristique due à la convection thermique, mais le maximum reste situé sur la paroi interne, alors que le minimum se déporte vers la paroi externe. Cette asymétrie est un résultat de l'effet de courbure, et de l'écart entre les conditions thermiques imposées aux parois radiales et la solution conductrice (36).

La force centrifuge (II) (nulle sur les parois verticales) résulte de l'interaction entre trois termes dont l'importance relative est liée à Re . Pour les faibles valeurs de Re , la force centrifuge se répartit en deux zones : négative sur les parois horizontales et positive à l'intérieur de la cavité. Au-delà de $Re = 500$, on tend vers une structure nettement antisymétrique, résultant de la dominance du terme (IIc).

Pour la force de Coriolis (III) (nulle sur les parois verticales), les termes sont proportionnels à Ra/Re (IIIa) et à Re (IIIb). Pour $Re > 300$ la configuration présente une zone étendue de valeur négative au centre, et une couche de forte variation sur les parois horizontales, résultant de la prépondérance du terme (IIIb). Pour $Re < 300$, la structure est plus complexe et présente, en particulier, une couche de forte variation sur la paroi horizontale inférieure.

Si l'on dresse un bilan général des différentes forces, on peut distinguer deux régimes principaux :

(1) Pour les forts Re (> 500), on note deux zones d'influence : le long des parois verticales où il y a équilibre entre les forces gravifique et visqueuse, et la partie centrale de la cavité, englobant les parois horizontales, où l'équilibre se fait entre les forces de Coriolis et visqueuse, conformément aux résultats de Hyun [15] lorsque $(Ra/Pr)^{1/2} \ll Re$. Les valeurs maximales des forces gravifique et centrifuge se situent entre 10 et 25% de celles des deux premières, alors que la convection est relativement négligeable.

(2) Pour les faibles Re , l'étude pour $Re = 100$ met en évidence trois zones distinctes. A proximité de la paroi horizontale inférieure, les forces de Coriolis et centrifuge se compensent, alors que sur la paroi horizontale supérieure, il y a addition des forces centrifuge et de Coriolis qui sont contre-balançées par la force visqueuse (dominante), et la force gravifique. Dans le coeur de la cavité et jusqu'aux parois verticales, l'équilibre s'installe, d'une part, entre les forces centrifuge et de Coriolis, qui se compensent, et, d'autre part, la force visqueuse à laquelle s'opposent les forces d'inertie et gravifique.

La transition entre les deux régimes est associée à des changements significatifs dans les configurations de forces centrifuge et de Coriolis.

6.2. Discussions des solutions asymptotiques

Les profils calculés de vitesses radiale u et azimutale v sont représentés sur les Figs. 9 et 10 dans le plan vertical méridien, avec les prédictions asymptotiques (22) et (23) dérivées de l'analyse de Hunter [6] (Figs. 11 et 12), pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re (avec $Ra = 10^4$). Les hypothèses de base pour les solutions asymptotiques correspondent à des régimes conductifs avec $Fr \ll 1$ et $R_c \gg 1$. Les solutions numériques montrent une dissymétrie due à l'effet de courbure ($R_c = 2$) lorsque la convection thermique domine ($Re < 300$). Il est intéressant de constater que dans la partie inférieure des profils ($z < 0$), la prédiction théorique coïncide relativement bien avec les calculs en situation réelle. Cela résulte de la part dominante des forces de Coriolis dans ces régions. Avec $Re = 100$, les profils calculés donnent $u_{\max} = 15.2$ et $|v_{\min}| = 11.9$, alors que les solutions asymptotiques prédisent $u_{\max} = 16.2$ et $|v_{\min}| = 14.1$, soit des différences relatives de 6 et de 15% respectivement pour les vitesses radiale et azimutale (par

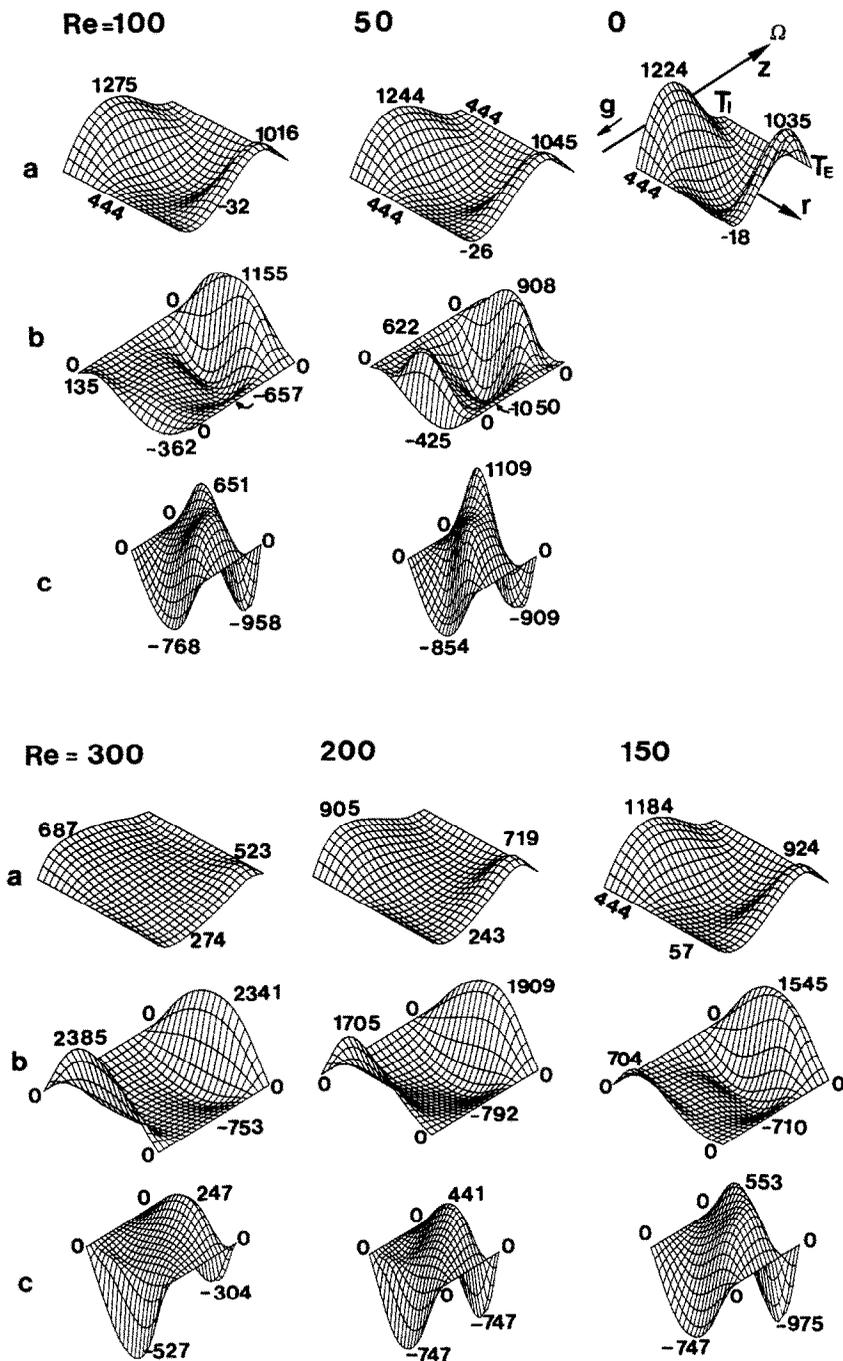


FIG. 8. Représentation dans le plan (r, z) des forces motrices : gravifique (a), de Coriolis (b) et centrifuge (c) lorsque Re varie pour $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$, $Fr = 1$ (sauf pour $Re = 0$, $Fr = 0$).

rapport aux solutions purement conductrices de Hunter [6]). Pour $Re = 500$, à la transition entre les régimes convectif et conductif, l'écart sur la vitesse azimutale tombe à 5%. La vitesse axiale n'est pas représentée, car ne présentant pas d'effets significatifs sur l'écoulement, et la solution asymptotique correspondant à une perturbation d'ordre λ^3 pour $\lambda \leq O(1)$, seulement.

Sur les Figs. 13 et 14, ont été représentées les variations, en fonction de Re , des maxima des vitesses u

et w , et v dans la cavité. On remarque d'abord que, pour la vitesse radiale u , la solution théorique de Hunter [6] varie avec une pente constante, en présentant un léger décalage avec la solution calculée lorsque Re augmente. Cette différence doit être attribuée à un effet de courbure. Malgré cela, les pentes restent assez voisines dans la zone de conduction, $O(Re^{-0.93})$ et $O(Re^{-1})$. Quant à la vitesse azimutale, la solution asymptotique, après un changement de pente pour $Re = 500$, coïncide très bien avec la sol-

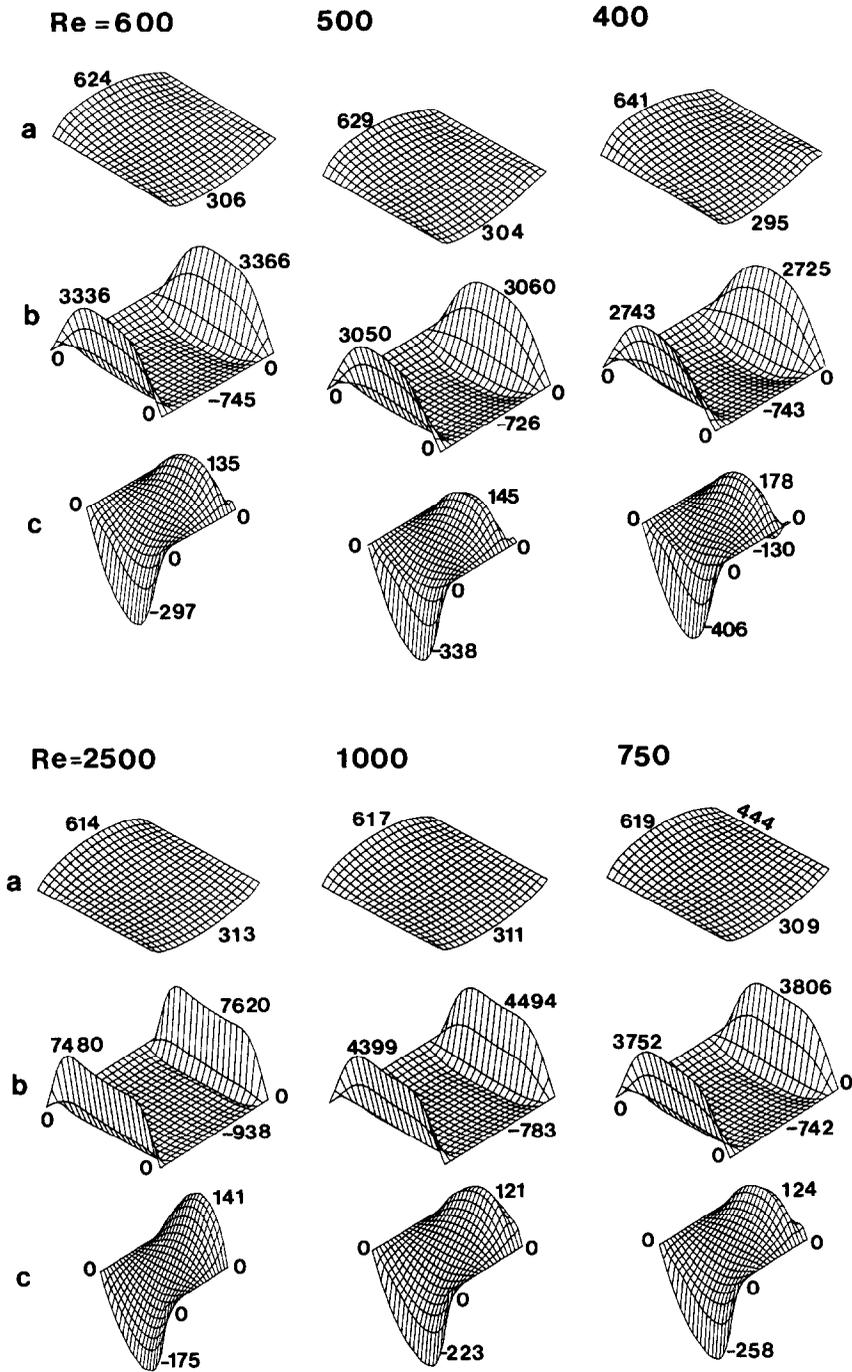


FIG. 8—suite

ution calculée, suivant $O(Re^{-0.88})$. Cela confirme la transition vers le régime conductif, également mise en évidence par les changements de pente des variations des vitesses radiale et axiale.

6.3. Etudes des transferts thermiques

La Fig. 15 représente les variations du nombre de Nusselt Nu en fonction de Re , sur les deux parois actives (chaude et froide). La prédiction, valide pour les régimes conductif et convectif faible et pour $Re_c \gg 1$,

est encadrée par les solutions numériques, différentes aux parois interne et externe du fait de la courbure finie $R_c = 2$. On a également porté sur la figure les valeurs de Nu correspondant à la solution conductrice (36). La solution théorique, donnée par la relation (35), est identique sur les deux parois interne et externe ($Re \gg 1$). Elle est définie pour $\lambda = Ra Re^{-3/2} \leq O(1)$. Pour $Re < 300$, c'est à dire $\lambda > 1.945$, on obtient une prédiction irréaliste de Nu , qui suggère ainsi une limitation à l'applicabilité de la solution asymptotique.

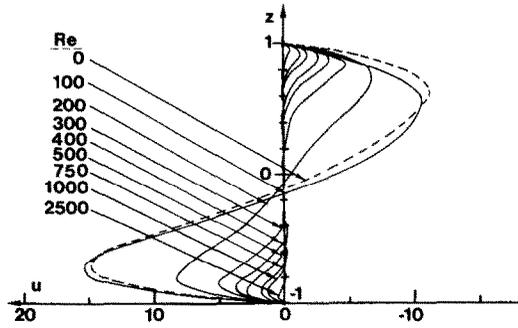


FIG. 9. Profil axial de la vitesse radiale u calculée, lorsque Re varie pour $Ra = 10^4$, $Fr = 1$ (sauf pour $Re = 0$, $Fr = 0$), $R_c = 2$.

On a représenté sur la Fig. 16 les variations de Nu par rapport à la valeur "conductrice" en fonction de Re . Pour $R_c \gg 1$, $Nu - 1$ varie comme $O(Re^{-3})$, qui concorde bien avec la variation de la solution calculée sur la paroi interne (la valeur "conductrice" a été prise pour $Re = 2500$). Sur la paroi externe, la variation est de $O(Re^{-6})$, ce qui semble correspondre à l'influence du second terme du développement (35). L'importance du paramètre de courbure est encore mise en évidence par les transferts thermiques plus grands sur la paroi interne que sur la paroi externe.

6.4. Influence du nombre de Froude de rotation Fr

Le nombre de Froude de rotation détermine l'importance relative de l'accélération centrifuge par rap-

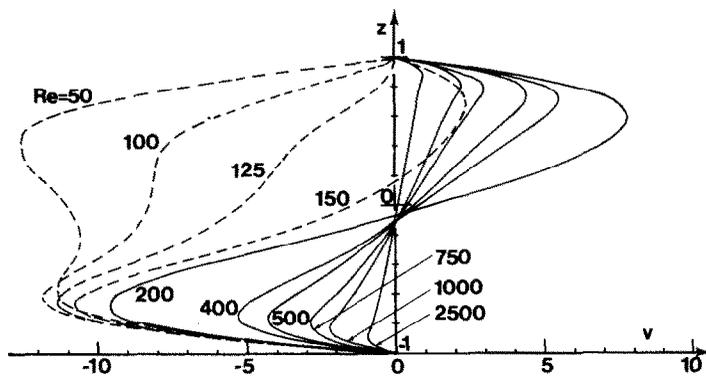


FIG. 10. Profil axial de la vitesse azimutale v calculée, lorsque Re varie pour $Ra = 10^4$, $Fr = 1$ (sauf pour $Re = 0$, $Fr = 0$), $R_c = 2$.

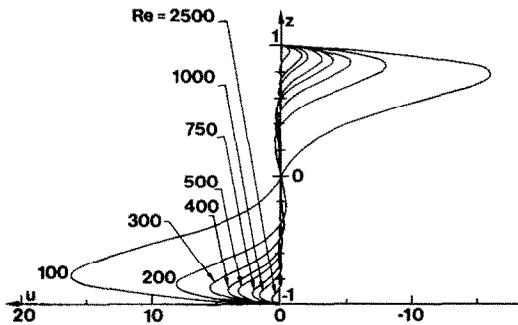


FIG. 11. Profil axial de la vitesse radiale u analytique donnée par la relation (23) (réf. [6]) lorsque Re varie pour $Ra = 10^4$, $Fr \ll 1$, $R_c \gg 1$.

port à la pesanteur. Il intervient aussi dans la définition du nombre de Rossby thermique, Ro , caractéristique de la variation maximale de densité pour un fluide de Boussinesq. Deux types de configurations ont été étudiés pour $Ra = 10^4$: lorsque les mécanismes dominant l'écoulement sont la convection thermique ou la rotation, respectivement pour $Re = 10$ et 10^3 (Figs. 17 et 18).

La convection thermique dominante détermine des déformations caractéristiques des lignes d'isothermes (Fig. 17). Dans le cas où $Re = 10$, le nombre de Rossby est très grand (au-delà de $Ro = 26$, il n'y a plus de solution axisymétrique stationnaire, cf. Fig.

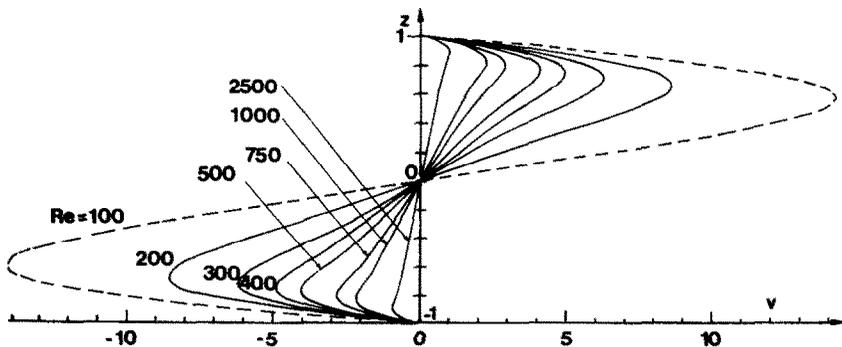


FIG. 12. Profil axial de la vitesse azimutale v analytique donnée par la relation (22) (réf. [6]) lorsque Re varie pour $Ra = 10^4$, $Fr \ll 1$, $R_c \gg 1$.

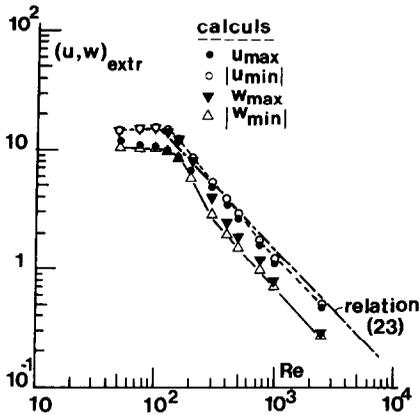


FIG. 13. Variations des extréma de vitesses radiale, u , et axiale, w , lorsque Re varie. Comparaisons avec les solutions asymptotiques proposées par Hunter [6].

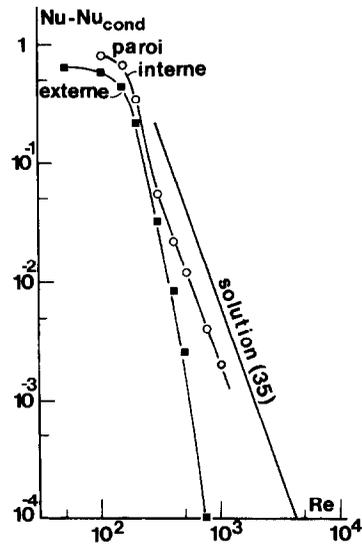


FIG. 16. Variation de l'écart à la solution conductrice du nombre de Nusselt, Nu , lorsque Re varie. Comparaison avec la solution asymptotique (35) d'après Hunter [6] lorsque $Fr \ll 1$ et $Re \gg 1$.

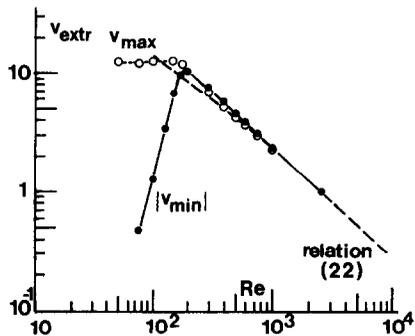


FIG. 14. Variations des extréma de la vitesse azimutale, v , lorsque Re varie. Comparaison avec la solution asymptotique proposée par Hunter [6].

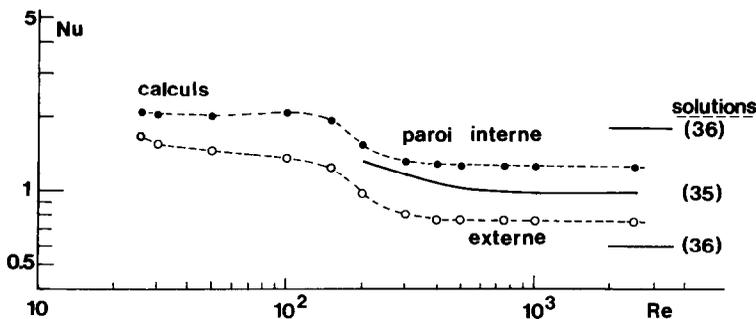


FIG. 15. Variation du nombre de Nusselt calculé, Nu , lorsque Re varie. Comparaison avec la solution conductrice (36) et la solution asymptotique (35) d'après Hunter [6] lorsque $Fr \ll 1$ et $Re \gg 1$.

5). L'augmentation du nombre de Froude se manifeste par une déformation plus accentuée des isothermes, qui traduit le renforcement de la convection. Lorsque Fr varie de 0.04 à 0.185 (où $Ro = 26$), il en résulte un changement très net : des zones de fortes survitesses se développent principalement dans le coin inférieur de la paroi chaude. La figure montre l'évolution vers une stratification verticale des vitesses azimutales. Ceci se traduit par un déplacement des lignes de cour-

ant, et le tourbillon central est étiré vers le haut de la paroi chaude. Un début de récirculation tend à apparaître dans le coin correspondant (cf. Fig. 6). Une variation importante des frottements visqueux est visible sur les parois actives verticales (surtout vers la paroi chaude).

Dans le cas où $Re = 10^3$, la variation du nombre de Froude a un effet assez limité sur l'état thermique, qui reste typiquement conductif (Fig. 18). Le nombre de

Rossby maximal reste assez faible et inférieur à 0.352. Il apparaît que lorsque $0.1 \leq Fr \leq 1$, il n'y a pas de grand changement des configurations. Lorsque l'on augmente le nombre de Froude, par contre ($Fr = 5$ et 10 ; les configurations pour $Fr = 25$, non représentées dans cet article, sont similaires à celles obtenues pour $Fr = 10$), on accroît l'influence des termes de force centrifuge et de Coriolis dans les équations du mouvement. Il en résulte une extension de la zone

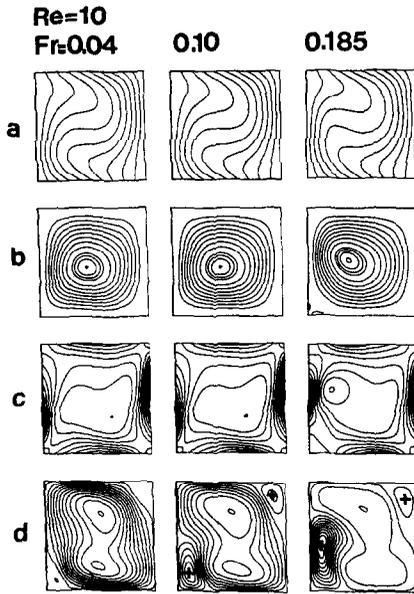


FIG. 17. Configurations d'écoulement pour $Re = 10$, $Ra = 10^4$, lorsque Fr varie à la limite de convergence des solutions de Boussinesq axisymétriques: isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), isovitesse azimutales (d).

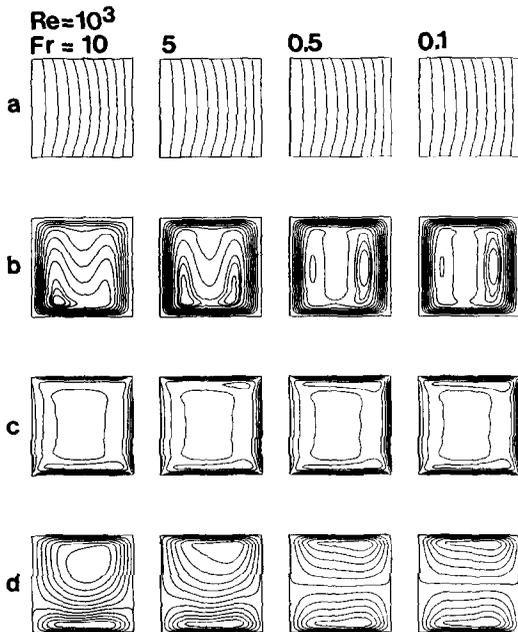


FIG. 18. Configurations d'écoulement pour $Re = 10^3$, lorsque Fr varie $0.1 \leq Fr \leq 10$: isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), isovitesse azimutales (d).

de survitesse, alors que la zone de sousvitesse inférieure conserve une structure de type couche limite. Au niveau des lignes de courant, des changements affectent le coeur de la cavité, provenant du décollement progressif des lignes de courant externes de la couche limite à la paroi supérieure. La concen-

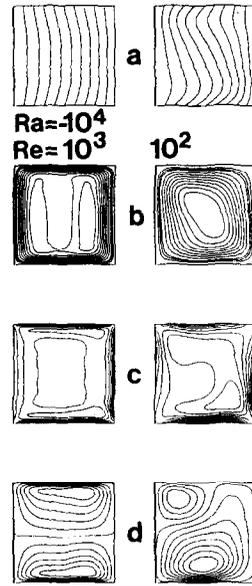


FIG. 19. Configurations d'écoulement lorsque $Ra = -10^4$ et Re varie: $Re = 10^2, 10^3$: isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), isovitesse azimutales (d).

tration des lignes de courant vers le coin inférieur de la paroi chaude démontre une forte accélération des particules à cet endroit.

6.5. Influence du nombre de Rayleigh Ra

L'effet thermique a été considéré sous le double aspect du chauffage par la paroi interne ($Ra < 0$) ou externe ($Ra > 0$) et de l'accroissement de la différence de température.

L'influence du chauffage par l'intérieur et l'extérieur a été étudiée sur les Figs. 7 ($Ra > 0$) et 19 ($Ra < 0$), pour $Re = 10^2$ et 10^3 , avec $Fr = 1$.

Pour $Re = 10^2$, il y a une différence significative au niveau de toutes les configurations présentées. La solution est typiquement convective pour $Ra = 10^4$ (Fig. 7). Pour $Ra = -10^4$ (Fig. 19), le mouvement se développe en sens inverse et la zone de survitesse est dominante dans le fond de la cavité. La zone de sousvitesse est repoussée dans le coin externe supérieur. L'écoulement correspond à un état intermédiaire où l'effet stabilisant de la rotation commence à être dominant ainsi que le mettent en évidence notamment les configurations d'isothermes.

L'effet du chauffage par le cylindre intérieur ou extérieur est peu visible à $Re = 10^3$. Les configurations sont très similaires bien que les sens de rotation de l'écoulement dans le plan vertical soient inversés pour $Ra = -10^4$ et 10^4 . L'entraînement en survitesse dans la direction azimutale se réalise dans la partie supérieure pour $Ra = 10^4$ (Fig. 7) et dans la partie inférieure pour $Ra = -10^4$ (Fig. 19).

Le renforcement de l'état convectif, lorsque l'on augmente Ra , est mis en évidence sur la Fig. 20 pour $Re = 10^3$, $Fr = 1$. Pour $Ra = 10^2$ et 10^4 (cf. Fig. 7), la

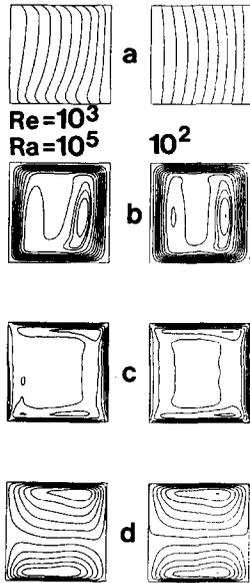


FIG. 20. Configurations d'écoulement pour $Re = 10^3$, lorsque Ra varie: $Ra = 10^2, 10^5$: isothermes (a), lignes de courant (b), isotourbillons (c), isovitesse azimutales (d).

convection thermique est faible par rapport aux effets de la rotation et la solution thermique est du type essentiellement conductif. Pour $Ra = 10^5$, la convection thermique commence à s'opposer aux forces de rotation. Cet effet est surtout notable sur la configuration d'isothermes. Ce phénomène s'accompagne aussi d'un changement sensible au niveau des structures de vitesse azimutale. Les maxima de vitesse sont localisés dans les coins où l'écoulement horizontal rencontre les parois chaude et froide. Le rapport $Ra Re^{-2} = 0.1$ est encore supérieur à la limite déterminée précédemment pour le régime convectif avec $Ra = 10^4$.

7. CONCLUSION

Quelques aspects de la convection thermique ont été étudiés par simulation numérique dans une cavité cylindrique fermée en rotation, et au moyen d'une méthode spectrale Tau-Chebyshev. Des essais numériques ont été réalisés pour une gamme étendue des valeurs des paramètres permettant de couvrir les régimes hydrodynamiques de type convectif et conductif. Pour les valeurs élevées de Re (régime conductif) et pour $Pr = 0.71$, $Ra = 10^4$, $Fr = 1$, $AR = 1$ et $R_c = 2$, la validité des solutions numériques a été contrôlée par rapport à des solutions asymptotiques ($R_c \rightarrow \infty$), dérivées des travaux de Hunter [6]. Pour les valeurs élevées du nombre de Rossby thermique, Ro , lorsque le modèle de Boussinesq devient de moins en moins valide, on a observé des limites d'existence de la solution correspondant à $Ro > 45/Re^{1/4}$.

Une étude séparée de trois paramètres physiques caractéristiques, Re , Fr et Ra , a permis de mettre en évidence la complexité de l'écoulement d'autant plus grande que la vitesse de rotation est plus faible; la

courbure jouant alors un rôle important même pour $R_c = 2$ et $AR = 1$ [33]. L'influence des forces motrices: gravifique, centrifuge et de Coriolis a été analysée suivant les valeurs de Re . Les solutions asymptotiques permettent une bonne approximation des vitesses mises en jeu lorsque $Re > 300$. La transition entre les deux régimes convectif et conductif, pour lequel la rotation a stabilisé la convection, est mise en évidence lorsque $Ra/Re^2 \leq 0.04$, à Ra fixé à 10^4 . Ces différents régimes sont caractérisés par les variations des maxima de vitesses.

Remerciements—Les auteurs souhaitent remercier le Dr A. C. Hindmarsh et le Professeur R. Sani pour avoir mis à leur disposition le logiciel ODEPACK, et le Dr R. Peyret (directeur du GRECO 64—C.N.R.S.), ainsi que le Professeur G. De Vahl Davis. Cette recherche a été engagée à la demande de la direction scientifique de la S.N.E.C.M.A., avec le support financier de la D.R.E.T. (Direction des Recherches Etudes et Techniques—Groupe 6) et grâce à une attribution d'heures CPU sur le CRAY-1/S par le Conseil Scientifique du Centre de Calcul Vectoriel pour la Recherche (C.C.V.R.). Support financier du M.R.T. (A.D. Aéro, TUL, No. 84F1147). L'aide apportée par le C.N.U.S.C. (Centre National Universitaire Sud de Calcul) et le Point d'Accès St-Charles est à mentionner.

REFERENCES

1. A. T. Conlisk and J. D. Walker, Forced convection in a rapidly rotating annulus, *J. Fluid Mech.* **122**, 91–108 (1982).
2. R. Hide, An experimental study of thermal convection in a rotating liquid, *Phil. Trans. R. Soc. London* **A250**, 441–478 (1958).
3. K. Stewartson, On almost rigid rotations, *J. Fluid Mech.* **3**, 17–26 (1957).
4. A. R. Robinson, The symmetric state of a rotating fluid differentially heated in the horizontal, *J. Fluid Mech.* **6**, 599–620 (1959).
5. H. P. Greenspan, The theory of rotating fluids. In *Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics* (Edited by G. K. Batchelor and J. W. Miles). Crawley, Sussex (1969).
6. C. Hunter, The axisymmetric flow in a rotating annulus due to a horizontally applied temperature gradient, *J. Fluid Mech.* **27**, 753–778 (1967).
7. V. Barcilon and J. Pedlosky, On the steady motions produced by a stable stratification in a rapidly rotating fluid, *J. Fluid Mech.* **29**, 673–690 (1967).
8. J. M. Owen, J. R. Pincombe and H. Rogers, Source-sink flow inside a rotating cylindrical cavity, *J. Fluid Mech.* **155**, 233–265 (1985).
9. G. M. Homsy and J. L. Hudson, Centrifugally driven thermal convection in a rotating cylinder, *J. Fluid Mech.* **35**, 33–52 (1969).
10. G. De Vahl Davis, E. Leonardi and J. A. Reizes, Convection in a rotating annular cavity. In *Proc. XIVth Int. Center for Heat and Mass Transfer Symposium*, Dubrovnik, Yugoslavia (1982).
11. T. Matsuda, K. Hashimoto and H. Takeda, Thermally driven flows in a gas centrifuge with an insulated sidewall, *J. Fluid Mech.* **73**, 389–399 (1976).
12. J. W. Chew, J. M. Owen and J. R. Pincombe, Numerical predictions for laminar source-sink flow in rotating cylindrical cavity, *J. Fluid Mech.* **143**, 451–466 (1984).
13. J. W. Chew, Development of a computer program for the prediction of flow in a rotating cavity, *Int. J. Num. Meth. Fluids* **4**, 667–683 (1984).
14. E. Leonardi, J. A. Reizes and G. De Vahl Davis, Heat transfer in a vertical rotating annulus: a numerical study.

- In *Proc. VIIIth Int. Heat Transfer Conference*, Munich, West Germany (1982).
15. J. M. Hyun, Source-sink flows of a stratified fluid in a rotating annulus, *J. Fluid Mech.* **145**, 111–125 (1984).
 16. R. Balasubramanian and S. Ostrach, Fluid motion in the Czochralski method of crystal growth, *Physico-Chemical Hydrodyn.* **5**, 3–18 (1984).
 17. R. Lamprecht, D. Schwabe, A. Scharmann and E. Schultheiss, Experiments on buoyant, thermocapillary and forced convection in Czochralski configuration, *J. Crystal Growth* **65**, 143–152 (1983).
 18. M. J. Crochet, P. J. Wouters, F. T. Geyling and A. S. Jordan, Finite-element simulation of Czochralski bulk flow, *J. Crystal Growth* **65**, 153–165 (1983).
 19. M. Mihelcic, K. Wingerath and Ch. Pirron, Three-dimensional simulations of the Czochralski bulk flow, *J. Crystal Growth* **69**, 473–488 (1984).
 20. W. E. Langlois, Buoyancy-driven flows in crystal growth melts, *A. Rev. Fluid Mech.* **17**, 191–215 (1985).
 21. R. Hide, On source-sink flows in a rotating fluid, *J. Fluid Mech.* **32**, 737–764 (1968).
 22. D. A. Bennetts and W. D. N. Jackson, Source-sink flows in a rotating annulus: a combined laboratory and numerical study, *J. Fluid Mech.* **66**, 689–705 (1974).
 23. H. S. Keshgi and L. E. Scriven, Viscous flow through a rotating square channel, *Physics Fluids* **28**, 2968–2979 (1985).
 24. H. Riehl and D. Fultz, The general circulation in a steady rotating-dishpan experiment, *Q. J. R. Meteor. Soc.* **84**, 389–417 (1958).
 25. M. Bowden and H. F. Eden, Thermal convection in a rotating fluid annulus: temperature, heat flow and flow field observations in the upper symmetric regime, *J. Atmos. Sci.* **22**, 185–195 (1964).
 26. W. W. Fowles and R. Hide, Thermal convection in a rotating annulus of liquid: effect of viscosity on the transition between axisymmetric and non-axisymmetric flow regimes, *J. Atmos. Sci.* **22**, 541–558 (1965).
 27. D. Gottlieb and S. A. Orszag, Numerical analysis of spectral methods: theory and applications, CBMS-NSF, Reg. Conf. Series in Applied Math., Siam (1977).
 28. C. Temperton, Fast mixed-radix real Fourier transforms, *J. Comp. Phys.* **52**, 340–350 (1983).
 29. R. C. Singleton, An algorithm for computing the mixed-radix Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **17**, 93–103 (1969).
 30. B. Lhomme, J. Morgenstern and P. Quandalle, Preconditioned F.F.T. algorithms. In *Euromech 159 on Spectral Meth. in Comp. Fluid Mech.*, Nice, France (1982).
 31. D. B. Haidvogel and T. Zang, The accurate solution of Poisson's equation by expansion in Chebyshev polynomials, *J. Comp. Phys.* **30**, 137–180 (1979).
 32. B. Bondet de la Bernardie, Contribution à la modélisation et à la simulation du comportement dynamique et thermique des fluides visqueux par les méthodes spectrales, Thèse, Univ. Aix-Marseille III (1980).
 33. A. Randriamampianina, Etude de régimes d'écoulement induits par la force gravifique dans une cavité cylindrique en rotation, Thèse, Univ. Aix-Marseille II (1984).
 34. P. Bontoux, B. Bondet de la Bernardie and B. Roux, Spectral methods for natural convection problems. In *Num. Meth. for Coupled Problems* (Edited by E. Hinton, P. Bettess and R. W. Lewis), pp. 1018–1030. Pineridge Press, Swansea (1981).
 35. A. Randriamampianina, P. Bontoux, B. Roux and P. Argoul, Multistep methods for spectral Tau-Chebyshev approximation. Application to rotating and buoyancy driven internal flows, *Notes Num. Fluid Mech. Vieweg* **13**, 302–309 (1986).
 36. A. C. Hindmarsh, LSODE and LSODI, two new initial value ordinary differential equation solvers, *ACM-SIGNAL Newsletter* **15**, 10–11 (1980).
 37. L. R. Petzold, Automatic selection of methods for solving stiff and non stiff systems of ordinary differential equations, Sandia Nat. Lab. Report SAND80-8230 (1980).
 38. C. W. Gear, Numerical initial value problems in ordinary differential equations. In *Automatic Computation* (Edited by G. E. Forsythe). Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1971).
 39. D. D. Joseph, Stability of fluid motion II, *Natural Philosophy* (Edited by B. D. Coleman), Vol. 28. Springer, Berlin (1976).
 40. D. D. Gray and A. Giorgini, The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases, *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 545–551 (1976).
 41. E. Leonardi, A numerical study of the effects of fluid properties on natural convection, Ph.D. Thesis, University of New South Wales, Australia (1984).
 42. C. Connor and S. I. Güceri, Laminar and turbulent natural convection in vertical cylindrical annulus, *J. Num. Heat Transfer* (à paraître).
 43. S. I. Güceri and B. Farouk, Numerical solutions in laminar and turbulent natural convection. In *Natural Convection, Fundamentals and Applications* (Edited by S. Kakaç, W. Aung and R. Viskanta), pp. 615–654. Hemisphere, Washington, D.C. (1985).

BOUANCY DRIVEN FLOWS IN ROTATING CYLINDRICAL ANNULUS

Abstract—A spectral Tau-Chebyshev method is used for the prediction of the motion of a rotating Boussinesq fluid driven by buoyancy from a horizontal temperature gradient. The analysis is made for the axisymmetric regime in annular cavities when the physical parameters vary as: $0 \leq Re \leq 2500$; $Ra = 10^2, \pm 10^4, 10^5$; $0 \leq Fr \leq 25$. The transition from the thermal convection regime to the rotation dominated regime results from the competition between the various buoyancy, centrifugal and Coriolis forces. The validity of the asymptotical solutions derived from Hunter (1966) when $Fr \ll 1$ and $Re \gg 1$, is discussed when Re varies.

STRÖMUNGEN DURCH AUFTRIEB IM ROTIERENDEN ZYLINDRISCHEN RINGSPALT

Zusammenfassung—Eine spektrale Tau-Chebyshev-Methode wird zur Berechnung der Strömung eines rotierenden Boussinesq-Fluids benutzt, welche vom Auftrieb durch einen horizontalen Temperaturgradienten herrührt. Die Untersuchung wurde im axialsymmetrischen Bereich in Ringräumen für folgende Parameter durchgeführt: $0 \leq Re \leq 2500$; $Ra = 10^2, \pm 10^4, 10^5$ und $0 \leq Fr \leq 25$. Der Übergang von der Strömungsform, bei welcher thermische Konvektion vorherrscht, zu der Strömungsform, bei welcher Rotation vorherrscht, ergibt sich aus der Wechselwirkung zwischen den Auftriebs-, Zentrifugal- und Coriolis-Kräften. Die Gültigkeit der von Hunter (1966) hergeleiteten asymptotischen Lösungen für $Fr \ll 1$ und $Re \gg 1$ bei variiertem Re -Zahl wird erörtert.

ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
КОЛЬЦЕВЫХ КАНАЛАХ

Аннотация—Спектральный метод Тау-Чебышева применяется для расчета естественной конвекции вращающейся жидкости Буссинеска, вызванной горизонтальным градиентом температур. Проведен анализ осесимметричного течения в кольцевых полостях при $0 \leq Re \leq 2500$; $Ra = 10^2, \pm 10^4, 10^5$; $0 \leq Fr \leq 25$. Переход от тепловой конвекции к случаю, в котором преобладает режим вращения, является результатом взаимодействия подъемных, центробежных сил и сил Кориолиса. Рассматривается справедливость полученных Хантером (1966) для случая $Fr \ll 1$ и $Re \gg 1$ асимптотических решений при переменном Re .